



TITLE:

# A design-theoretic analogy between codes, lattices, and vertex operator algebras (Designs, Codes, Graphs and Related Areas)

AUTHOR(S):

三枝崎, 剛

---

CITATION:

三枝崎, 剛. A design-theoretic analogy between codes, lattices, and vertex operator algebras (Designs, Codes, Graphs and Related Areas). 数理解析研究所講究録 2015, 1956: 60-67: KJ00009926645.

ISSUE DATE:

2015-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/224059>

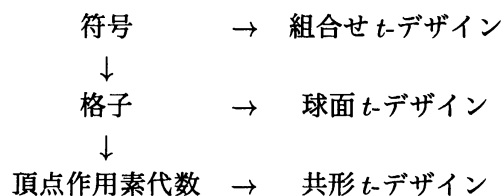
RIGHT:

# A design-theoretic analogy between codes, lattices, and vertex operator algebras

山形大学・地域教育文化学部 三枝崎 剛  
Tsuyoshi Miezaki  
Faculty of Education, Art and Science  
Yamagata University

## 1 はじめに

次の表のように、符号・格子・頂点作用素代数から、組合せ  $t$ -デザイン・球面  $t$ -デザイン・共形  $t$ -デザインが構成される：



特に, extremal Type II と呼ばれるクラスは, 高い  $t$  の  $t$ -デザインの例を与える. では, extremal という仮定を外した際, どの程度デザインに関して類似した性質があるか. 本稿ではこの問題を考えて行く.

以下では 3 つのデザインを扱うが, どのデザインを考えているかは, 文脈から明らかなので, 殆どの場合単に  $t$ -デザインと呼ぶ事にする.

## 2 格子と球面デザイン

球面デザインは次で定義される：

**定義 2.1.**  $X \subset S^{n-1} (\subset \mathbb{R}^n)$ ,  $|X| < \infty$ : 球面  $t$ -デザイン  $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|X|} \sum_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x})$   
for  $\forall$  polynomials  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  of degree  $\leq t$

幾つか基本的な性質及び例を挙げる：

— 球面デザインに関する基本的なこと —

- $X \subset S^{n-1}(r)$ :  $t$ -デザイン  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{r}}X \subset S^{n-1}$ :  $t$ -デザイン.
- $X$ :  $t$ -デザイン  $\Rightarrow X$ :  $(t-1)$ -デザイン  $\Rightarrow X$ :  $(t-2)$ -デザイン  $\dots$ .
- $\forall t, n \in \mathbb{N}, \exists X = t$ -デザイン in  $S^{n-1}$ .
- $X$  が  $t$ -デザイン  $\Leftrightarrow \sum_{\mathbf{x} \in X} P(\mathbf{x}) = 0$  for  $\forall P(\mathbf{x}) = P(x_1, \dots, x_n) \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq j \leq t$  (もし  $X = -X$  (antipodal) なら,  $j$  が偶数のみ調べればよい).
- 正  $n$  角形は  $(n-1)$ -デザイン.
- $E_8$ -型ルート系は 7-デザイン.

球面デザインを構成する方法は, いくつもあるが, ここでは格子を用いた方法を考える.  
格子に関する言葉を復習しよう:

— 格子に関する基本的なこと —

- $L(\subset \mathbb{R}^n)$ :  $n$ -次元格子  $\Leftrightarrow \exists$  basis  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  of  $\mathbb{R}^n$  such that  $L = \{k_1\mathbf{v}_1 + \dots + k_n\mathbf{v}_n \mid k_i \in \mathbb{Z}\}$ .
- $L^* := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbb{Z}, \forall \mathbf{x} \in L\}$ .
- $L$  が self-dual  $\Leftrightarrow L^* = L$ .
- $L$  が even if  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in 2\mathbb{Z}$ .
- $L$  が Type II  $\Leftrightarrow L$ : self-dual かつ even.
- $L$  の最小ノルム  $\min(L)$ :  $\min\{(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in L\}$ .
- $L$  のノルム  $m$  の shell:  $(L)_m = \{\mathbf{x} \in L \mid (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = m\}$ .

格子の shell は球面上に存在しているので, 格子から球面デザインを構成するとは, その shell から球面  $t$ -デザインを構成しようというものである.

格子のデザインを調べる際に有用な, theta series に関する性質を纏める:

— 格子の (harmonic) theta series —

- 格子  $L$  と  $P(\mathbf{x}) \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$  の Harmonic theta series:  $\vartheta_{L,P}(q) := \sum_{\mathbf{x} \in L} P(\mathbf{x}) q^{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sum_{m \geq 0} a_m^{(P)} q^m$ , where  $q = e^{\pi i \tau}$ ,  $\tau \in \mathbb{H}$ ,  $a_m^{(P)} = \sum_{\mathbf{x} \in (L)_m} P(\mathbf{x})$ .
- $(L)_m (\neq \emptyset)$  が  $t$ -デザイン  $\Leftrightarrow a_m^{(P)} = 0$  for every  $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq 2j \leq t$ .

このことから,  $1 \leq 2j \leq t$  に対し harmonic theta series の  $q^m$  の係数が消えていれば  $(L)_m$  は  $t$ -デザインである事がわかる.

一つ例を見てみよう:

例 2.1.  $L = \mathbb{Z}^2$  とおく. すると  $(L)_1 = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ ,  $(L)_2 = \{(\pm 1, \pm 1)\}$ . テータ級

数は,

$$\vartheta_L(q) = \vartheta_{L,1}(q) = 1 + 4q + 4q^2 + \cdots.$$

次の事実,

$$\bullet \text{ Harm}_2(\mathbb{R}^2) = \langle P_2 = x^2 - y^2 = \text{Re}(z^2), 2xy = \text{Im}(z^2) \rangle.$$

を用いると,  $\vartheta_{L,P_2}(q) \equiv 0$ , 即ち  $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $(L)_m$  は 3-デザインとなることがわかる.

実は  $L$  が Type II のとき, 次が知られている:

**定理 2.1** ([6, 11, 12]).  $L$ :  $n$ -次元 Type II 格子  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \vartheta_{L,P}(q) \text{ はモジュラー形式でウェイトは } n/2 + \deg(P), \\ \vartheta_{L,P}(q) \in \mathbb{C}[E_4(q), E_6(q)]. \end{cases}$$

これを用いると, 次のことがわかる:

**系 2.1.**  $\exists n$ -次元 Type II 格子  $\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{8}$ .

**系 2.2** ([13]).  $L$ :  $n$ -次元 Type II 格子  $\Rightarrow \min(L) \leq 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 2$ .

この不等式が等号となる際, 格子は extremal と呼ばれる:

**定義 2.2.**  $\bullet L$ :  $n$ -次元 Type II 格子.

$$L \text{ が extremal} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \min(L) = 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 2.$$

これらのことを用いると, 例えば,  $L$  が 24-次元 Type II 格子なら, 全てのシェルで 3-デザインが次のようにしてわかる:

**例 2.2.**  $\bullet L$ : 24-次元 Type II 格子,  $P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^{24})$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} \vartheta_{L,P}(q) \text{ はモジュラー形式でウェイトは } 12 + 2 = 14, \\ \vartheta_{L,P}(q) \in \mathbb{C}[E_4(q), E_6(q)]. \end{cases}$$

$\bullet$  しかしウェイトが 14 となるカスプ形式は存在しない.

$$\Rightarrow \vartheta_{L,P} = 0, \text{ i.e., } \sum_{x \in (L)_{2m}} P(x) = 0 \text{ for all } P(x) \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n), j = 2.$$

$\Rightarrow (L)_{2m}$  は 3-デザイン.

Extremal な Type II 格子に関しては次が成立する:

**定理 2.2** ([14, 15]).  $\bullet L$ : extremal な  $n$ -次元 Type II 格子.

$\Rightarrow (L)_{2m}$  は次の値  $t$  の  $t$ -デザインとなる:

$$t = \begin{cases} 11 & n \equiv 0 \pmod{24} \\ 7 & n \equiv 8 \pmod{24} \\ 3 & n \equiv 16 \pmod{24}. \end{cases}$$

この事より,  $n$  が 24 の倍数のときは, 11-デザインが得られる. 更に, 格子の shell から 12-デザイン以上は構成できないと予想されており, extremal な Type II 格子は, デザインという視点から見て大変美しい対象だという事がわかる. そして存在もあまり知られていない.  $\dim n = 24m$  のときの extremal な Type II 格子のリストを提示する:

$n$	# extremal even uni. lattice
24	1 (Leech lattice $\Lambda_{24}$ )
48	$\geq 4$ ( $P_{48p}, P_{48q}, P_{48n}, P_{48m}$ )
72	$\geq 1$
$\geq 96$	?
$\geq 164000$	0

ここで、球面  $t$ -デザインの概念を拡張する：

**定義 2.3** ([8]).  $T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ .  $X$  が球面  $T$ -デザイン  $\Leftrightarrow$

$$\sum_{\mathbf{x} \in X} P(\mathbf{x}) = 0$$

holds for all  $P(\mathbf{x}) \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$  with  $j \in T$ .

**注意 2.1.** •  $t$ -デザインは  $\{1, 2, \dots, t\}$ -デザインのことである.

- $T_4$  を 4 の倍数以外の自然数からなる集合とする:  $T_4 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, \dots\}$ .  
すると,  $(\mathbb{Z}^2)_m (\neq \emptyset)$  は  $T_4$ -デザイン.

講演中に、次の結果を紹介しましたが、これは完全に誤りでした。お詫びして訂正いたします。

**定理 2.3** ([9]).  $L$ :  $n$ -次元 Type II 格子  $\Rightarrow (L)_{2m}$  は  $T_4$ -デザイン.

### 3 符号と組合せデザイン

組合せデザインは次で定義される：

**定義 3.1.** •  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $X^{\{k\}} = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \mid \alpha_i \in X, \alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j)\}$ .

- $\mathbb{B} \subset X^{\{k\}}$ .

$(X, \mathbb{B})$ : 組合せ  $t$ -デザイン  $(t(v, k, \lambda)) \Leftrightarrow \text{For } \forall T \in X^{\{t\}}, \#\{B \in \mathbb{B} \mid T \subset B\} = \lambda (> 0)$ .

**例 3.1.** •  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $\mathbb{B} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 1\}\}$ .  
 $\Rightarrow (X, \mathbb{B})$  は 1-デザイン  $(1-(7, 2, 2))$ .

- $\mathbb{B} = \{\{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$ .  $\Rightarrow (X, \mathbb{B})$  は 2-デザイン  $(2-(7, 3, 1), \text{unique})$ .

球面デザインに関して、次のことを紹介した：

—— 球面  $t$ -デザインの同値条件 ——

$X$  が球面  $t$ -デザイン  $\Leftrightarrow \sum_{\mathbf{x} \in X} P(\mathbf{x}) = 0$  for  $\forall P(\mathbf{x}) = P(x_1, \dots, x_n) \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$ ,  
 $1 \leq j \leq t$ .

この類似が組合せデザインにも存在し、次のようなものである：

**定理 3.1** ([4]).  $\mathbb{B} \subset X^{\{k\}}$  が組合せ  $t$ -デザイン  $\Leftrightarrow \sum_{x \in \mathbb{B}} \tilde{f}(x) = 0$  for all  $f \in \text{Harm}_k$ ,  
 $1 \leq k \leq t$ .

ただし、定理中の記号は次で定義される：

—— 離散調和解析に関すること ——

- $X := \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $2^X$  を  $X$  の全ての部分集合.
- $\mathbb{R}2^X, \mathbb{R}X^{\{k\}}$ :  $2^X, X^{\{k\}}$  の元で張られる実ベクトル空間.
- $\gamma(z) := \sum_{y \in X^{\{k-1\}}, y \subset z} y$ .
- $\text{Harm}_k := \ker(\gamma|_{\mathbb{R}X^{\{k\}}})$ .
- $\mathbb{R}X^{\{k\}}$  の元  $f$  を次のように書く  $f = \sum_{z \in X^{\{k\}}} f(z)z$
- $f \in \mathbb{R}X^{\{k\}}$  は  $\tilde{f} \in \mathbb{R}2^X$  に次のようにして拡張される: for all  $u \in 2^X$ ,  $\tilde{f}(u) = \sum_{z \in X^{\{k\}}, z \subset u} f(z)$ .

一つ例を見てみよう：

例 3.2. 次のように  $X, \mathbb{B}$  をおく:  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,

$\mathbb{B} = \{\{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$ .

すると  $(X, \mathbb{B})$  は組合せ 2-デザインであった. 従って,  $\text{Harm}_2$  の元で和を取ると消えるはずで, 例えば,  $\sum_{x \in \mathbb{B}} \tilde{f}(x) = 0$ , for  $f := \{1, 3\} - \{2, 3\} - \{1, 4\} + \{2, 4\} \in \text{Harm}_2$ .

格子から球面デザインが構成できたように, 符号から組合せデザインが構成できる. その紹介のために, 符号に関する言葉を復習しよう：

—— 符号に関する基本的なこと ——

- $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ .
- $C$ : 長さ  $n$  の符号  $\Leftrightarrow C$  は  $\mathbb{F}_2^n$  の部分空間.
- $C^\perp = \{x \in \mathbb{F}_2^n \mid x \cdot y = 0 \ (\forall y \in C)\}$ .
- $C$  が self-dual  $\Leftrightarrow C = C^\perp$ .
- ウェイト of  $x = (x_i)$ :  $\text{wt}(x) = \#\{i \mid x_i \neq 0\}$ .
- $C$  が Type II  $\Leftrightarrow C$ : self-dual かつ  $\text{wt}(x) \equiv 0 \pmod{4} \ (\forall x \in C)$ .
- $C$  の最少距離  $\min(C)$ :  $\min\{\text{wt}(x) \mid (0 \neq) x \in C\}$ .
- $C$  のノルム  $m$  の shell:  $\{c \in C \mid \text{wt}(c) = m\}$ .

符号から組合せデザインを構成するとは,  $\mathbb{F}_2^n$  と  $2^X$  の自然な同一視の下で, その shell からデザインを構成しようというものである.

格子の球面デザインを調べる際に有用であった harmonic theta series の類似がある：

## Harmonic weight enumerators

- 符号  $C$  と  $f \in \text{Harm}_\ell$  の harmonic weight enumerator:  $w_{C,f}(x, y) := \sum_{c \in C} \tilde{f}(c) x^{n-\text{wt}(c)} y^{\text{wt}(c)} = \sum_{m \geq 0} a_m^{(f)} x^{n-m} y^m$ , where  $a_m^{(f)} = \sum_{x \in (C)_m} \tilde{f}(x)$ .
- $C$  の weight enumerator:  $w_C(x, y) := \sum_{c \in C} x^{n-\text{wt}(c)} y^{\text{wt}(c)} = \sum_{m \geq 0} |(C)_m| x^{n-m} y^m$ .
- $w_{H_8}(x, y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8$ .
- $C_m (\neq \emptyset)$  が  $t$ -デザイン  $\Leftrightarrow a_m^{(f)} = 0$  for every  $f \in \text{Harm}_j$ ,  $1 \leq j \leq t$ .

更に Hecke-Schoeneberg の結果の類似も以下の用に存在する：

定理 3.2 ([5, 3]).  $C$  を長さ  $n$  の Type II 符号,  $f \in \text{Harm}_k$  とおく.

すると,  $\begin{cases} w_{C,f}(x, y) = (xy)^k Z_{C,f}(x, y) \\ Z_{C,f}(x, y) \text{ は次数 } n-2k \text{ で, } Z_{C,f}(x, y) \in I_{G,\chi_k}, \end{cases}$   
ただし,

$$I_{G,\chi_k} = \begin{cases} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 0 \pmod{4} \\ P_{12} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 2 \pmod{4} \\ P_{18} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 3 \pmod{4} \\ P_{30} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

ただし, 記号などは以下で定義される：

## Invariants

$$\bullet G = \left\langle T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\bullet \chi_k(T_1) = (-1)^k, \chi_k(T_2) = \sqrt{-1}^{-k}.$$

- $I_G := I_{G,\chi_0} = \mathbb{C}[x, y]^G : G$  の不変式環,  
 $I_{G,\chi_k} : G$  の  $\chi_k$  に関する双対不変式環.

これらの空間は次のようによくわかっている [3]：

$$I_{G,\chi_k} = \begin{cases} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 0 \pmod{4} \\ P_{12} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 2 \pmod{4} \\ P_{18} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 3 \pmod{4} \\ P_{30} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$\text{ただし, } P_8(x, y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8, P_{24}(x, y) = x^4y^4(x^4 - y^4)^4, \dots$$

これより, 次が得られる：

系 3.1.  $\exists$  長さ  $n$  の Type II 符号  $\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{8}$ .

系 3.2 ([7]).  $C$ : 長さ  $n$  の Type II 符号  $\Rightarrow \min(C) \leq 4\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 4$ .

すると Type II 格子と同様 Type II 符号に関しても extremal という概念が定義できる：

定義 3.2. •  $C$ : 長さ  $n$  の Type II 符号.

$$C \text{ が extremal } \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \min(C) = 4\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 4.$$

Extremal な Type II 符号に関しては次が成立する：

定理 3.3 ([2]). •  $C$ : 長さ  $n$  の extremal な Type II 符号  
 $\Rightarrow (C)_m$  は次の値  $t$  の  $t$ -デザイン：

$$t = \begin{cases} 5 & n \equiv 0 \pmod{24} \\ 3 & n \equiv 8 \pmod{24} \\ 1 & n \equiv 16 \pmod{24}. \end{cases}$$

さて、組合せ  $t$ -デザインの概念は次のように拡張された：

定義 3.3 ([4, 3]).  $T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  とおく.  $X$  が組合せ  $T$ -design  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum_{x \in X} \tilde{f}(x) = 0$  holds for all  $f \in \text{Harm}_j, j \in T$ .

注意 3.1. •  $t$ -デザインは  $\{1, 2, \dots, t\}$ -デザインのことである.

更に我々は組合せ  $T$ -デザインの概念を更に拡張した：

定義 3.4 ([9]). •  $X \subset X^{\{k\}} \cup X^{\{\ell\}} (k \neq \ell)$ .

$X$  が 2 つのウェイトに関する組合せ  $t$ -デザイン  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$  for any  $T \in X^{\{t\}}, \#\{W \in X \mid T \subset W\} = \lambda$ .

$T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  とおく.  $X$  が 2 つのウェイトに関する組合せ  $T$ -デザイン  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum_{x \in X} \tilde{f}(x) = 0$  holds for all  $f \in \text{Harm}_j, j \in T$ .

すると次が成立する事がわかった：

定理 3.4 ([9]). •  $C$ : 長さ  $n$  の Type II 符号  $\Rightarrow (C)_m \cup (C)_{n-m}$ : 2 つのウェイトに関する組合せ  $T_2$ -デザイン.

特に  $(C)_m \cup (C)_{n-m}$  は 2 つのウェイトに関する組合せ 1-デザイン.

これは次の結果の別証を与えている：

系 3.3 ([1, 10]).  $(C)_{n/2}$  は  $T_2$ -デザイン. 特に  $(C)_{n/2}$  は 1-デザイン.

## 4 頂点作用素代数と共形デザイン

組合せ  $T$ -デザイン, 球面  $T$ -デザインの類似として, 我々は共形  $t$ -デザインの概念を次のように拡張した：

定義 4.1 ([9]).  $T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  とおく.  $X$  が共形  $T$ -デザイン  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{tr}|_X o(v) = 0$  holds for all  $v \in \text{Ker } \pi = \bigoplus_{n>0} (V)_n$  of weight  $j \in T$ .

注意 4.1.  $t$ -デザインは共形  $\{1, 2, \dots, t\}$ -デザインのことである.

この新たに定義された  $T$ -デザインに関しても, 幾つかのことを証明したが, 詳しくはプレプリント [9] をご参照下さい.



## 5 まとめ

$t$ -デザインに関することを,  $T$ -デザインに拡張することで, 成立する事を見てきた. この概念は, harm に関する性質を細かく見ていることから, どのような集合  $T$  のデザインになるか調べる事で, 符号・格子・頂点作用素代数を深く理解することが出来ると期待する. しかし,  $T$ -デザインになる  $T$  の決定は, 述べなかったが Lehmer 予想とデザイン理論の対応などを鑑みても, 難しい問題である.

本稿では, まず第一歩として, Type II というクラスに限って考えてきた. 今後更に Type II, 或いは他のクラスに対して,  $T$  を解析して行くことは, 符号・格子・頂点作用素代数の研究, 或いは, その類似性を高めるという意味でも大切と考えている.

## 参考文献

- [1] W. O. Alltop, Extending  $t$ -designs, *J. Combin. Theory Ser. A* **18** (1975) 177-186.
- [2] E. F. Assmus, Jr. and H. F. Mattson, Jr., New 5-designs, *J. Combinatorial Theory* **6** (1969), 122-151.
- [3] C. Bachoc, On harmonic weight enumerators of binary codes, *Des. Codes Cryptogr.* **18** (1999), no. 1-3, 11-28.
- [4] Ph. Delsarte, Hahn polynomials, discrete harmonics, and  $t$ -designs, *SIAM J. Appl. Math.* **34** (1978), no. 1, 157-166.
- [5] A.M. Gleason, Weight polynomials of self-dual codes and the MacWilliams identities. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 3, pp. 211-215. Gauthier-Villars, Paris, 1971. 94A10 (05B30)
- [6] E. Hecke, Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1983.
- [7] C.L. Mallows, A.M. Odlyzko and N.J.A. Sloane, Upper bounds for modular forms, lattices, and codes, *J. Algebra* **36** (1975), 68-76.
- [8] T. Mieziaki, On a generalization of spherical designs, *Discrete Math.* **313** (2013), no. 4, 375-380.
- [9] T. Mieziaki, A design-theoretic analogy between codes, lattices, and vertex operator algebras, preprint.
- [10] An upper bound of the value of  $t$  of the support  $t$ -designs of extremal binary doubly even self-dual codes, preprint.
- [11] B. Schoeneberg, Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen. (German) *Math. Ann.* **116** (1939), no. 1, 511-523.
- [12] B. Schoeneberg, "Elliptic modular functions: an introduction," Translated from the German by J. R. Smart and E. A. Schwandt. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 203. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.
- [13] C.L. Siegel, Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen (German), *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* **1969** (1969), 87-102.
- [14] B. B. Venkov, Even unimodular extremal lattices. (Russian) Algebraic geometry and its applications. Trudy Mat. Inst. Steklov. 165 (1984), 43-48; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 165 (1985) 47-52.
- [15] B. B. Venkov, "Boris Réseaux et designs sphériques," (French) [Lattices and spherical designs] Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires, 10-86, Monogr. Enseign. Math., 37, Enseignement Math., Geneva, 2001.